Aula 18

Operadores simétricos

Lembrete: Seja $T: D(T) \to \mathcal{H}$, $\overline{D(T)} = \mathcal{H}$. T é dito simétrico se $(Tf, g) = (f, Tg)$, $f, g \in D(T)$, ou seja $T \subseteq T'$.

Lema 1 $T \subseteq T'$ sse $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in D(T)$.

Demonstração $(\Rightarrow)$ Se T for simétrico $\Rightarrow$

$(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)} \in \mathbb{R}$ $\forall x \in D(T)$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in D(T)$.

Lembre a identidade de polarização:

$$4(Tx, y) = (T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) + i(T(x+iy), x+iy) - i(T(x-iy), x-iy). \quad (1)$$

Vamos mostrar que $4(Tx, y) = 4(x, Ty)$.

$$(1) \Rightarrow 4(x, Ty) = 4\overline{(Ty, x)} = (T(x+y), (x+y)) - (T(y-x), (y-x)) - i(T(y+ix), (y+ix)) + i\underbrace{(T(y-ix), (y-ix))}_{= i\cdot(-i)(T(y+ix), (y+ix))} =$$

$$= (T(x+y), (x+y)) - (T(x-y), (x-y)) - i\underbrace{(T(iy-x), (iy-x))}_{= i\cdot(-i)(T(y+ix), (y+ix))} + i\underbrace{(T(yi+x), (yi+x))}_{= i\cdot(-i)(T(y-ix), (y-ix))} = 4(Tx, y)$$

Corolário Se $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Lema 2 Seja $T \subseteq T' \Rightarrow \mathbb{C}_{\pm} \subseteq \hat{\rho}(T)$

Demonstração Consideremos $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$

$$\Rightarrow \|(\lambda - T)f\|^2 = ((\lambda - T)f, (\lambda - T)f) = \|(\alpha - T)f\|^2 + \beta^2\|f\|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}((\alpha - T)f, i\beta f)}_{=0} = \|(\alpha - T)f\|^2 + \beta^2\|f\|^2 \Rightarrow$$

$$2\,\mathrm{Re}((-i\beta)((\alpha - T)f, f))$$

$$\|(\lambda - T)f\| \geq |\beta|\,\|f\| \Rightarrow \quad (2)$$

$$\lambda \in \hat{\rho}(T)$$

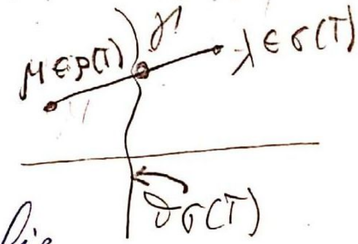
Corolário 1) $\sigma_{ap}(T) \subseteq \mathbb{R}$. De fato, suponha que $\exists\, \lambda = \alpha + i\beta \in \sigma_{ap}(T)$ e $\beta \neq 0 \Rightarrow$ $\|(\lambda - T)f\| \geq |\beta|\,\|f\| \Rightarrow$ não existe sequência dos autovalores aproximados. $\Rightarrow \lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. (Pode usar o fato $\hat{\rho}(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T)$)

2) Seja $\lambda \in \mathbb{C}_\pm \underset{(2)}{\Rightarrow} \|R_\lambda(T)\| \leq \dfrac{1}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$

Lema 3 Seja $T \subseteq T' \Rightarrow \sigma(T)$ é ou subconjunto de $\mathbb{R}$, ou $\sigma(T) = \mathbb{C}$, ou $\sigma(T) = \overline{\mathbb{C}_+}$, ou $\sigma(T) = \overline{\mathbb{C}_-}$.

Demonstração Lembre que $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ (veja Prop 1 da aula 3. Eu falei que T deve ser limitado, mas na verdade não deve)

Sejam $\lambda \in \sigma(T)$ e $\mu \in \rho(T)$ tais que $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ e $\mathrm{Im}\,\mu > 0 \Rightarrow$ segmento que liga λ e μ contém um $\gamma \in \partial\sigma(T) \Rightarrow \gamma \in \sigma_{ap}(T)$



Observe que $\gamma \in \mathbb{C}_+$, mas isso contradiz Corolário 1) em cima. Similarmente pode excluir o caso $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$, $\mathrm{Im}\,\mu < 0$.

Resumindo: 1) Se $\mathbb{C}_+ \cap \sigma(T) \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{C}_+ \cap \rho(T) = \emptyset \Rightarrow$ $\mathbb{C}_+ \subseteq \sigma(T)$

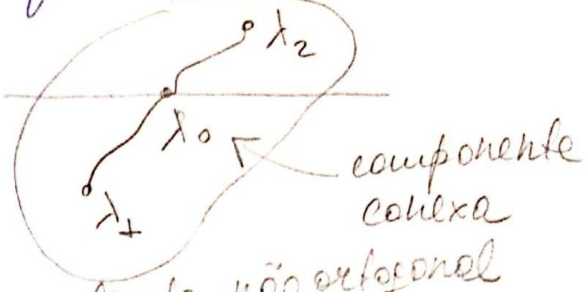
2) Se $\mathbb{C}_- \cap \sigma(T) \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{C}_- \cap \rho(T) = \emptyset \Rightarrow$ $\mathbb{C}_- \subseteq \sigma(T)$

Observando que $\sigma(T)$ é fechado, obtemos o resultado.

Observação 1) Se $T \subseteq T' \Rightarrow \mathbb{C}_\pm \subseteq \hat{\rho}(T)$. $\Rightarrow$ $\mathbb{C}_+$ e $\mathbb{C}_-$ são componentes abertas e conexas por caminhos $\Rightarrow d_\lambda(T)$ é constante em $\mathbb{C}_+$ e em $\mathbb{C}_-$.

Definimos $n_\pm(T) = d_{\bar{\lambda}}(T) = \dim(\mathcal{R}(\bar{\lambda} - T)^\perp) = \dim(\mathcal{N}(\lambda - T')) =$
$= \dim(\mathcal{N}(\pm i - T'))$, $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$

2) Se $T \subseteq T'$ e $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_0 \in \hat\rho(T) \Rightarrow$
$n_+(T) = n_-(T)$



Teorema 4 (Formula de Neumann)

Seja $T \subseteq T'$ fechado $\Rightarrow$ soma direta não ortogonal

$$D(T') = D(T) \dotplus N(\lambda - T') \dotplus N(\bar\lambda - T'), \quad \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \quad (3)$$ e

$$\dim(D(T')/D(T)) = n_+(T) + n_-(T).$$

Demonstração: Denotamos $N_\lambda = N(\lambda - T')$, $N_{\bar\lambda} = (\bar\lambda - T')$

- $D(T) \dotplus N_\lambda \dotplus N_{\bar\lambda} \subseteq D(T')$ é obvia.
- Mostremos que $D(T') \subseteq D(T) \dotplus N_\lambda + N_{\bar\lambda}$.

Seja $x \in D(T')$. Já que $\lambda \in \hat\rho(T) \Rightarrow \mathcal{H} = R(\lambda - T) \oplus N_{\bar\lambda}$

$\Rightarrow \exists x_0 \in D(T)$ e $x'_{\bar\lambda} \in N_{\bar\lambda}$ tais que

$$(\lambda - T')x = \underbrace{(\lambda - T)x_0}_{R(\lambda-T)} + \underbrace{x'_{\bar\lambda}}_{N_{\bar\lambda}} = (\lambda - T')x_0 + x'_{\bar\lambda}.$$

Seja $x_{\bar\lambda} = (\lambda - \bar\lambda)^{-1} x'_{\bar\lambda}$ (ou seja $x'_{\bar\lambda} = (\lambda - \bar\lambda)x_{\bar\lambda}$) $\Rightarrow$

$$(\lambda - T')x = (\lambda - T)x_0 + (\lambda - \underbrace{\bar\lambda)x_{\bar\lambda}}_{T'x_{\bar\lambda}} = (\lambda - T')x_0 + (\lambda - T')x_{\bar\lambda} \Rightarrow$$

$$(\lambda - T')(x - x_0 - x_{\bar\lambda}) = 0 \Rightarrow x_\lambda = x - x_0 - x_{\bar\lambda} \in N_\lambda \Rightarrow$$

$$x = x_0 + x_\lambda + x_{\bar\lambda} \in D(T) \dotplus N_\lambda + N_{\bar\lambda}$$

- Mostremos que a soma é direta.

Lembrete: Sejam $A, B \subset \mathcal{H}$ subesp. lineares $\Rightarrow$

$$A \cap B = \{0\} \Leftrightarrow [\, x_A + x_B = 0 \text{ implica } x_A = x_B = 0 \,]$$

Suponha que $x_0 + x_\lambda + x_{\bar\lambda} = 0 \Rightarrow$

$$(\lambda - T')(x_0 + x_\lambda + x_{\bar\lambda}) = (\lambda - T)x_0 + (\lambda - \bar\lambda)x_{\bar\lambda} = 0 \Rightarrow$$

$(\lambda - T)x_0 = (\bar\lambda - \lambda)x_{\bar\lambda}$. Como $\mathcal{H} = R(\lambda - T) \oplus N(\bar\lambda - T')$ (4)

$\underset{R(\lambda-T)}{\cap}$ $\underset{N(\bar\lambda - T')}{\cap}$

$\Rightarrow x_{\bar\lambda} = 0$ e $(\lambda - T)x_0 = 0 \Rightarrow Tx_0 = \lambda x_0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

(como autovalor do T simétrico). $\Rightarrow x_0 = 0$

Finalmente, $x_\lambda = -x_0 - x_{\bar\lambda} = 0$. $\Rightarrow$ a soma em (3) é direta.

Ex 1 Sejam $\mathcal{H} = L^2(0,\infty)$, $Tf = -if'$, $D(T) = H_0^1(0,\infty)$.

Não é difícil mostrar que $T'g = -ig'$ e $D(T') = H^1(0,\infty)$

$\Rightarrow T \subseteq T'$.

Por Teorema 1, $D(T') = D(T) \dotplus N(i - T') \dotplus N(-i - T')$.

Temos $N(i - T') = \{f \in H^1(0,\infty) : if + if' = 0\} =$

$= \{C e^{-x} : C \in \mathbb{C}\} \Rightarrow n_+(T) = 1$,

$N(-i - T') = \{f \in H^1(0,\infty) : -if + if' = 0\} = \{0\}$ já que

$if - if'$ tem solução $f = Ce^x \notin L^2(0,\infty)$ para $C \neq 0$

$\Rightarrow n_-(T) = 0$

Finalmente, $D(T') = H^1(0,\infty) = H_0^1(0,\infty) \dotplus \{e^{-x}\}$.

Operadores semilimitados

Def 1 $T \subseteq T'$ se chama limitado inferiormente se $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tal que $\forall f \in D(T)$: $(Tf, f) \geq \ell \|f\|^2$ $(T \geq \ell)$

2) — " — superiormente se $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall f \in D(T)$ $(Tf, f) \leq M\|f\|^2$ $(T \leq M)$.

Observação Se $\ell = 0 \Rightarrow T$ é dito positivo.

Se $T \geq \ell \Rightarrow B = T - \ell \geq 0$. (basta considerar T positivo)

Proposição 1 Se $T \geq 0 \Rightarrow (-\infty,0) \subseteq \hat{\rho}(T)$

Demonstração Seja $\lambda < 0 \Rightarrow$

$$\|(\lambda - T)f\|^2 = ((\lambda-T)f,(\lambda-T)f) = (Tf,Tf) - 2\lambda\underbrace{(f,Tf)}_{\geq 0} + \lambda^2(f,f) \geq \lambda^2\|f\|^2 \Rightarrow \|(\lambda-T)f\| \geq |\lambda|\,\|f\| \quad (4)$$

Corolário 1) Se $T \geq l \Rightarrow (-\infty,l) \subseteq \hat{\rho}(T)$

De fato, seja $\lambda < l \Rightarrow \|(\lambda-T)f\|^2 = \|(\lambda-l+l-T)f\|^2 =$

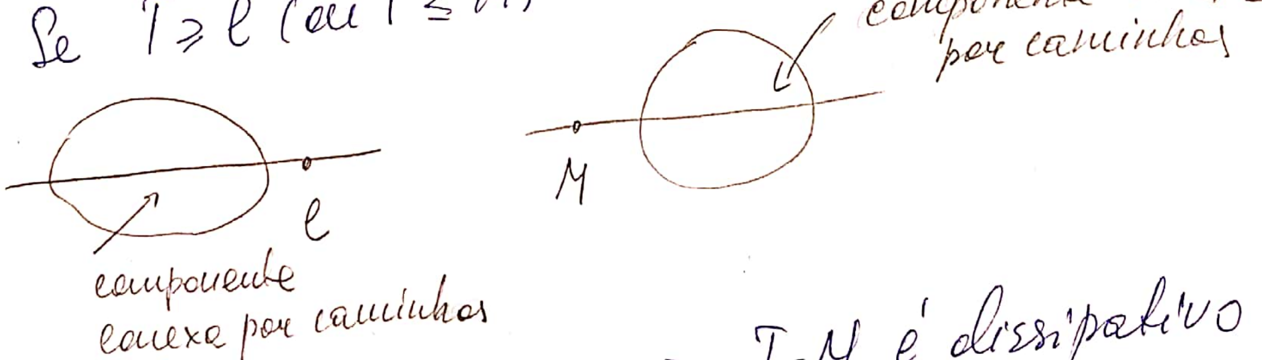
$$= (((\lambda-l)+l-T)f,((\lambda-l)+l-T)f) = \|(l-T)f\|^2 + (\lambda-l)^2\|f\|^2 + 2\underbrace{(\lambda-l)}_{<0}\underbrace{(f,(l-T)f)}_{\leq 0} \geq (\lambda-l)^2\|f\|^2 \Rightarrow$$

$$\|(\lambda-T)f\| \geq |\lambda-l|\,\|f\| \quad (5) \Rightarrow (-\infty,l) \subseteq \hat{\rho}(T)$$

2) Analogamente se $T \leq M \Rightarrow (M,\infty) \subset \hat{\rho}(T)$

3) Lembrando $Gap(T) = \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(T)$. e $Gap(T) \subseteq \mathbb{R}$, para T simétrico, obtemos que no caso 2) $Gap(T) \subseteq [l,\infty)$ e no caso 3) $Gap(T) \subseteq (-\infty,M]$

4) Se $T \geq l$ (ou $T \leq M$) $\Rightarrow n_+(T) = n_-(T)$



Proposição 2 1) Se $T \leq M \Rightarrow T-M$ é dissipativo

2) Se $T \geq l \Rightarrow -T+l$ é dissipativo.

Em particular se $\exists\, \lambda_0 > 0$ tal que $R(\lambda_0 + M - T) = \mathcal{H}$ (resp. $R(\lambda_0 - l + T) = \mathcal{H}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $T-M$ ($-T+\ell$ resp.) gera C_0-semigrupo das contrações. Portanto T ($-T$ resp.) gera C_0-semigrupo $S(t)$ satisfazendo $\|S(t)\| \leq e^{Mt}, t \geq 0$ ($\|S(t)\| \leq e^{-\ell t}, t \geq 0$ resp.)

Demonstração Seja $x \in D(T)$. Lembre que o conjunto de dualidade é $F(x) = \{\ell_x\}$, onde $\ell_x(y) = \langle y, \ell_x \rangle_{H \times H^*} = (y, x)$.

$\Rightarrow \langle (T-M)x, \ell_x \rangle_{H \times H^*} = ((T-M)x, x) \leq 0 \Rightarrow$ $T-M$ é dissipativo. Analogamente $\langle (-T+\ell)x, \ell_x \rangle_{H \times H^*} = ((-T+\ell)x, x) \leq 0$. O resto segue facilmente. veja aula 15

Ex2 Sejam $H = L^2(\mathbb{R})$, $Tf = -f''$,

$D(T) = \{f \in H^2(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$ (veja definição do H^2 no livro de Schmüdgen, p. 13, 15)

Mostremos que $\sigma_{ap}(T) = [0, \infty)$

Demonstração • Seja $f \in D(T) \Rightarrow (Tf, f) = \int_{\mathbb{R}} -f'' \cdot \bar{f}\, dx =$

$= -f' \cdot \bar{f}\, \Big|_{-\infty}^{0-} - f'\bar{f}\, \Big|_{0+}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} f' \cdot \bar{f}'\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f'|^2 dx \geq 0. \Rightarrow$

$T \geq 0 \Rightarrow$ por Corolário 3) em cima temos $\sigma_{ap}(T) \subseteq [0, \infty)$.

• Mostremos que $[0, \infty) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. Basta mostrar que $R(\lambda - T) \neq \overline{R(\lambda - T)}$ $\forall \lambda \geq 0$.

Vamos mostrar: 1) $\overline{R(\lambda - T)} = L^2(\mathbb{R})$ e 2) $R(\lambda - T) \neq L^2(\mathbb{R})$ para $\forall \lambda \geq 0$. Seja $\lambda_0 \geq 0$.

1) Temos $H = L^2(\mathbb{R}) = \overline{R(\lambda_0 - T)} \oplus N(\lambda_0 - T')$. Observe que $N(\lambda_0 - T') = \{0\}$. De fato $f \in N(\lambda_0 - T') \Leftrightarrow$ $f \in D(T') = H^1(\mathbb{R}) \cap (H^2(\mathbb{R}_+) \oplus H^2(\mathbb{R}_-))$ e $\lambda_0 f + f'' = 0$ (6)

Equação (6) tem solução formal $\tilde{f}_\pm = C_\pm e^{\pm i\sqrt{\lambda_0}x}$. (7)

Observe que $\tilde{f}_\pm \notin L^2(\mathbb{R})$ para $C_\pm \neq 0$ $\Rightarrow$

$N(\lambda_0 - T') = \{0\}$. Logo $L^2(\mathbb{R}) = \overline{R(\lambda_0 - T)}$.

2) Seja $h = e^{-|x|} \in L^2(\mathbb{R})$. Mostremos que $h \notin R(\lambda_0 - T)$.

Suponha que $\exists f \in D(T)$ tal que $(\lambda_0 - T)f = e^{-|x|}$, ou seja $\lambda_0 f + f'' = e^{-|x|}$, $f \in D(T)$. Solução formal tem forma
$$\tilde{f} = \begin{cases} c_1 e^{i\sqrt{\lambda_0}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda_0}x} + (\lambda_0+1)e^{-x}, & x \geq 0 \\ c_3 e^{i\sqrt{\lambda_0}x} + c_4 e^{-i\sqrt{\lambda_0}x} + (\lambda_0+1)e^{x}, & x < 0 \end{cases}.$$

Como $e^{\pm i\sqrt{\lambda_0}x} \notin L^2(\mathbb{R}_\pm)$ $\Rightarrow$ $c_j = 0$, $j = 1,2,3,4$ $\Rightarrow$
$$\tilde{f} = \begin{cases} (\lambda_0+1)e^{-x}, & x \geq 0 \\ (\lambda_0+1)e^{x}, & x < 0 \end{cases}.$$
Como $\tilde{f}(0) \neq 0 \Rightarrow \tilde{f}(x) \notin D(T)$

$\Rightarrow h \notin R(\lambda_0 - T)$.

Finalmente, $R(\lambda_0 - T) \neq L^2(\mathbb{R}) = \overline{R(\lambda_0 - T)}$ $\Rightarrow$

$[0,\infty) \subseteq \sigma_{ap}(T)$.

Operadores auto-adjuntos

Proposição 3 Seja $T \subseteq T'$. Suponha que $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $R(\lambda - T) = \mathcal{H}$ e $R(\bar{\lambda} - T) = \mathcal{H}$ $\Rightarrow$ $T = T'$ e $\lambda, \bar{\lambda} \in \rho(T)$.

Demonstração • Seja $g \in D(T')$. Como $R(\lambda - T) = \mathcal{H}$, $\exists f \in D(T)$ tal que $(\lambda - T')g = (\lambda - T)f$ $\Rightarrow$ $((\bar{\lambda} - T)x, g) = (x, (\lambda - T')g) =$
$= (x, (\lambda - T)f) = ((\bar{\lambda} - T)x, f)$, $x \in D(T)$ $\Rightarrow$ $((\bar{\lambda} - T)x, g - f) = 0$.

Como $R(\bar{\lambda} - T) = \mathcal{H}$, $g = f$ $\Rightarrow$ $g \in D(T)$ $\Rightarrow$ $D(T') \subseteq D(T)$.

Lembrando que $T \subseteq T'$, concluimos $T = T'$!

• Mostremos que $\lambda, \bar{\lambda} \in \rho(T)$. Como $R(\lambda - T) = \mathcal{H}$

$\Rightarrow N(\bar{\lambda} - T) = R(\lambda - T)^\perp = \{0\}$.

Se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow N(\lambda - T) = \{0\}$ já que $\sigma_p(T) \subseteq \mathbb{R}$.
Se $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow N(\lambda - T) = N(\bar{\lambda} - T) = \{0\}$.
Logo, $\lambda - T$ é bijetor $\Rightarrow (\lambda - T)^{-1}$ é limitado em
$H = R(\lambda - T)$ pelo T. do gráfico fechado $\Rightarrow \lambda \in \rho(T) \Rightarrow$
$\bar{\lambda} \in \rho(T)$ (já que $\lambda \in \rho(T)$ sse $\bar{\lambda} \in \rho(T')$ e $T = T'$)

Corolário 1) Se $T \subseteq T'$ e $R(T) = H \Rightarrow T = T'$ e
$T^{-1} \in B(H)$ e $T^{-1} = (T^{-1})'$.
2) Se existir $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $R(\lambda_0 - T) = H \Rightarrow T = T'$ e
$\lambda_0 \in \rho(T)$.

Proposição 4 Seja $T \subseteq T'$ fechado. Suponha que $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$
tal que $\lambda_0 \in \hat{\rho}(T) \Rightarrow T = T$ sse $d_{\lambda_0}(T) = 0$.

Demonstração $\Rightarrow$ Se $T = T' \Rightarrow n_\pm(T) = d_{\mp i}(T) = 0$
(pela formula de Neumann). Como $\mathbb{C}_- \cup B_\varepsilon(\lambda_0) \cup \mathbb{C}_+$ é
componente aberta e conexa por caminhos e $\hat{\rho}(T)$ é
aberto, $\Rightarrow d_{\lambda_0}(T) = d_{\mp i}(T) = 0$

$\Leftarrow$ Se $d_{\lambda_0}(T) = 0 \Rightarrow \dim R(\lambda_0 - T)^\perp = \dim N(\bar{\lambda}_0 - T') =$
$= \dim N(\lambda_0 - T') = 0$. Como $H = R(\lambda_0 - T) \oplus N(\lambda_0 - T') =$
$= R(\lambda_0 - T) \Rightarrow$ pelo Corolário 2) em cima $T = T'$.

Teorema 2. Se $T = T' \Rightarrow \hat{\rho}(T) = \rho(T)$ e $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \subseteq \mathbb{R}$

Demonstração • Se $T = T' \Rightarrow \sigma_p(T) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$
$\sigma_p(T) \cap \mathbb{C}_\pm = \emptyset \Rightarrow N(\lambda - T') = N(\lambda - T) = \{0\}$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}_\pm$
$R(\bar{\lambda} - T) = R(\lambda - T) = H$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}_\pm \Rightarrow \lambda, \bar{\lambda} \in \rho(T)$
$\Rightarrow \mathbb{C}_\pm \subseteq \rho(T)$ pela Prop. 3.

- Se $\lambda \in \hat{\rho}(T) \cap \mathbb{R}$ => $d_\lambda(T) = 0$ (como $T = T'$) => $N(\lambda - T) = N(\lambda - T') = \{0\}$ => $H = R(\lambda - T)$ => $(\lambda - T)^{-1}$ é limitado em todo H => $\lambda \in \rho(T)$ => $\hat{\rho}(T) = \rho(T)$.

Como $\sigma_{ap}(T) = \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(T)$ e $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ => $\sigma_{ap}(T) = \sigma(T)$. Como $\mathbb{C}_\pm \subseteq \rho(T)$ => $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Proposição 5 Seja $T \subseteq T'$ fechado e $\sigma(T) = \mathbb{R}$ => $T = T'$.

Demonstração Já que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, $\rho(T) \supseteq \mathbb{C}_\pm$ => $\forall \lambda \in \mathbb{C}_+$ (ou $\mathbb{C}_-$) : $R(\lambda - T) = R(\bar{\lambda} - T) = H$ => $T = T'$ pela Prop. 3.